

# Sur le nombre de sommets des polytopes entiers

**Estimer le nombre de points à coordonnées entières dans une région de l'espace est une activité à laquelle se livrent de nombreux mathématiciens et qui possède de multiples applications (géométrie, algèbre, théorie des nombres, optimisation...). On décrit ici ses liens avec la géométrie algébrique moderne... ou comment des problèmes élémentaires d'énoncé éclairent des questions centrales de géométrie algébrique, discipline dont l'accès est (à tort ?) réputé « difficile ».**

Dans tout ce texte, un *polytope entier de dimension  $n$*  est un polytope convexe (encadré 1) de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$ , non contenu dans un hyperplan et dont les sommets appartiennent au réseau  $\mathbf{Z}^n$  des points dont toutes les coordonnées sont entières. Si  $P$  est un tel polytope, c'est un très vieux problème que d'estimer ou relier le nombre de points entiers  $\text{card}(P \cap \mathbf{Z}^n)$  de  $P$ , le nombre de points entiers  $\text{card}(\overset{\circ}{P} \cap \mathbf{Z}^n)$  dans l'intérieur de  $P$ , le nombre de points entiers  $\text{card}(\partial P \cap \mathbf{Z}^n)$  sur le bord de  $P$  au volume euclidien de  $P$ . Pour le polygone présenté ci-dessous, le lecteur vérifiera que :  $\text{card}(P \cap \mathbf{Z}^2) = 30$ ,  $\text{card}(\overset{\circ}{P} \cap \mathbf{Z}^2) = 20$ ,  $\text{card}(\partial P \cap \mathbf{Z}^2) = 10$  et que l'aire de  $P$  vaut 24 si l'on décide (ce que l'on fera toujours) que l'aire d'une maille élémentaire vaut 1.

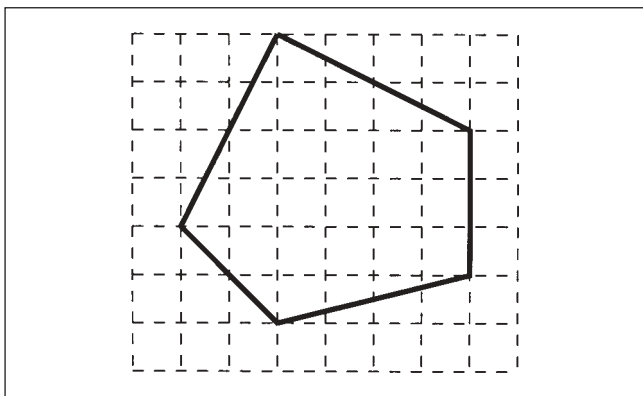


Figure 1 - Un exemple.

Nous énonçons dans la première partie quelques résultats motivés en particulier par la théorie des nombres puis, dans la deuxième partie, quelques résultats très récents, issus de la géométrie algébrique, pour des polytopes entiers particulièrement simples, dits de Fano : ceux possédant 0 comme seul point entier dans l'intérieur, et dont toutes les hyperfaces ont exactement  $n$

sommets formant une base du réseau  $\mathbf{Z}^n$  (encadré 1 pour les notions d'hyperfaces et de base d'un réseau). Modulo les transformations linéaires préservant le réseau  $\mathbf{Z}^n$ , il n'y a qu'un nombre fini de tels polytopes et des bornes précises sur le nombre de leurs sommets sont conjecturées en général et connues en petites dimensions. En associant à tout polytope de Fano une variété algébrique complexe, nous tenterons de faire découvrir au lecteur la *géométrie torique*, permettant d'attaquer les questions précédentes à l'aide de l'attirail moderne de la théorie de Mori.

## QUELQUES RÉSULTATS CLASSIQUES

### Des résultats centenaires

Compter les points entiers d'une partie de l'espace  $\mathbf{R}^n$  est à l'origine une question liée à l'approximation des nombres irrationnels par des nombres rationnels : Gauss obtient 3,14107 comme approximation du nombre  $\pi$  en évaluant à 282 697 le nombre de points entiers dans un disque de rayon 300 centré en 0 ! Cette théorie très ancienne progressa tout particulièrement grâce à Minkowski à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. Pour illustrer un peu mieux les techniques utilisées, nous nous contenterons de démontrer le résultat suivant, élémentaire mais crucial, dû à Blichfeldt (ce dernier fut inspiré par les techniques antérieures de Minkowski mais on lui doit cet énoncé particulièrement frappant).

**Théorème (Blichfeldt, 1914).** Soient  $K$  un compact de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  et  $m$  un entier positif. Si  $\text{vol}(K) \geq m$ , il existe au moins  $m + 1$  points distincts  $v_1, \dots, v_{m+1}$  de  $K$  tels que  $v_i - v_j \in \mathbf{Z}^n$  pour tous  $i$  et  $j$ .

La démonstration est très simple : soit  $\mathcal{C}$  le cube élémentaire  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ pour tout } i\}$ . Pour  $u \in \mathbf{Z}^n$ , on pose  $K_u = \{x \in \mathcal{C} \mid u + x \in K\}$ . Alors  $\text{vol}(K) = \sum_{u \in \mathbf{Z}^n} \text{vol}(K_u)$ . Supposons pour simplifier que  $\text{vol}(K) > m$ . Comme tous les  $\text{vol}(K_u)$  sont inférieurs ou égaux à 1, on en déduit qu'il y a au moins un point  $x \in \mathcal{C}$  appartenant à  $m + 1$  ensembles  $K_u$ . Autrement dit, il y a  $u_1, \dots, u_{m+1}$  distincts dans  $\mathbf{Z}^n$  tels

– Laurent Bonavero, Institut Fourier – UMR 5582 CNRS – Université Joseph Fourier, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères.  
tél. 04 76 63 58 52, laurent.bonavero@ujf-grenoble.fr

## Encadré 1

# POLYTOPES CONVEXES, SIMPLEXES, BASES D'UN RÉSEAU

Un polytope convexe de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  est le plus petit convexe contenant un nombre fini de points donnés. En dimension un, les polytopes convexes sont les segments ; en dimension deux, les polytopes convexes sont appelés polygones convexes, les triangles et les quadrilatères convexes sont des polygones convexes alors qu'un disque n'est pas un polygone convexe ; en dimension trois, les polytopes convexes sont appelés polyèdres convexes. Comme en dimension un, deux ou trois, les polytopes convexes ont des sommets et des faces. Les faces de dimension  $n - 1$  d'un polytope convexe de dimension  $n$  sont appelées hyperfaces (cette notion généralise celle de côté pour les polygones convexes).

Les polygones et polyèdres convexes les plus simples (i.e. avec le moins de sommets et de faces) sont respectivement les triangles et les tétraèdres. Les simplexes généralisent cette notion en dimension  $n$  : ils sont définis comme le plus petit ensemble convexe contenant  $n + 1$  points de  $\mathbf{R}^n$  non contenus dans un hyperplan.

Une famille de  $n$  points du réseau  $\mathbf{Z}^n$  est une base de  $\mathbf{Z}^n$  si tout point de  $\mathbf{Z}^n$  est une combinaison linéaire à coefficients entiers de points de cette famille. Lorsque  $n = 1$ , les deux familles formées du seul élément 1 ou  $-1$  sont les seules

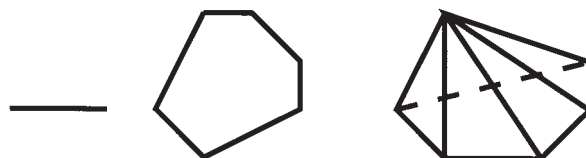


Figure - Un segment, un polygone et un polyèdre.

bases du réseau  $\mathbf{Z}$ . En toute dimension  $n \geq 2$ , il y a une infinité de bases de  $\mathbf{Z}^n$  : si la famille  $\{x_1, x_2\}$  est une base de  $\mathbf{Z}^2$ , la famille  $\{x_1, x_2 + dx_1\}$  est aussi une base de  $\mathbf{Z}^2$  pour tout entier  $d$ .

Les polytopes entiers de  $\mathbf{R}^n$  les plus simples sont les simplexes standard : ce sont les polytopes dont les  $n + 1$  sommets sont 0 et les éléments d'une base du réseau  $\mathbf{Z}^n$ . Ils sont de volume  $1/n!$  et cette propriété les caractérise parmi les simplexes à sommets entiers contenant 0 : en particulier, tout simplexe à sommets entiers est de volume supérieur ou égal à  $1/n!$ .

que  $v_j = x + u_j \in K$ , d'où le résultat. Le cas où  $\text{vol}(K) = m$  se traite en dilatant un peu  $K$  puis en passant à la limite lorsque le coefficient de dilatation décroît vers 1.

**Corollaire (Minkowski).** Soient  $K$  un compact convexe de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$ , contenant 0 et symétrique par rapport à 0 et  $m$  un entier positif. Si  $\text{vol}(K) \geq m2^n$ , il existe  $m$  paires de points distincts non nuls  $\pm u_j$  appartenant à  $K \cap \mathbf{Z}^n$ .

La démonstration consiste à appliquer le théorème de Blichfeldt à  $\frac{1}{2}K$  et poser  $u_j = v_j - v_{m+1}$  où les  $v_j$  sont donnés par le théorème de Blichfeldt.

L'énoncé précédent assure l'existence de beaucoup de points entiers dans certains compacts convexes si l'on en connaît un et si le volume est suffisamment grand. On attribue généralement à Blichfeldt l'inégalité suivante, qui majore le nombre de points entiers en fonction du volume : si  $K$  est un compact convexe de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  contenant 0 et tel que  $K \cap \mathbf{Z}^n$  n'est pas inclus dans un hyperplan,  $\text{card}(K \cap \mathbf{Z}^n) \leq n + n! \text{vol}(K)$ . Donnons-en une preuve (merci à Emmanuel Peyre) : si

$k = \text{card}(K \cap \mathbf{Z}^n) - n$ , considérons un simplexe  $S$  de volume minimal à sommets entiers contenus dans  $K$ . Ce simplexe a un volume au moins égal à  $1/n!$  (encadré 1). Parmi les  $k - 1$  points entiers restant dans  $K$ , choisissons le plus proche de  $S$  et appelons-le  $x_{n+2}$ . Le simplexe  $S'$  engendré par  $x_{n+2}$  et la face de  $S$  la plus proche de  $x_{n+2}$  est de volume au moins égal à  $1/n!$ , d'où  $\text{vol}(K) \geq \text{vol}(S) + \text{vol}(S') \geq 2/n!$ , etc.

### Des estimations plus récentes

Dans ce paragraphe, nous souhaitons estimer le nombre de points entiers sur le bord d'un polytope entier en fonction du nombre de points entiers à l'intérieur. Le premier résultat dans cette direction est le théorème de Pick, en dimension deux, que le lecteur pourra tester sur les polygones de la figure 2.

**Théorème (Pick, 1899).** Si  $P \subset \mathbf{R}^2$  est un polygone convexe entier, alors  $\mathcal{A}(P) = \text{card}(P \cap \mathbf{Z}^2) - \frac{1}{2} \text{card}(\partial P \cap \mathbf{Z}^2) - 1$  où  $\mathcal{A}(P)$  désigne l'aire euclidienne de  $P$ .

La démonstration consiste à traiter d'abord le cas d'un triangle : si  $T$  est un triangle entier dont les seuls points

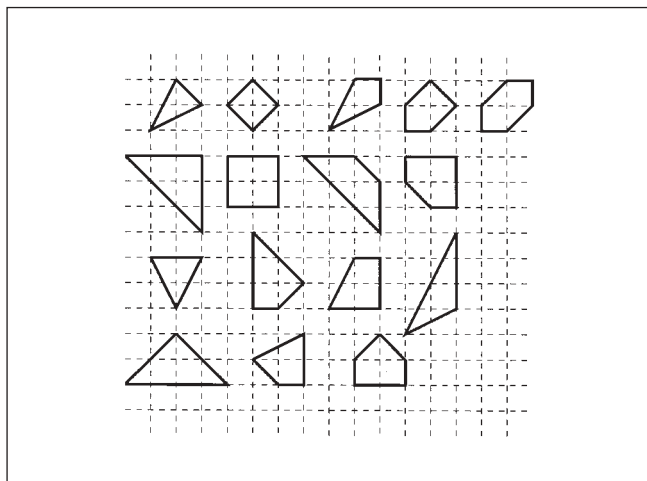


Figure 2 - 16 polygones remarquables.

entiers sont les sommets, alors  $\mathcal{A}(T) = 1/2$ . En effet, si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les sommets de  $T$ , alors le parallélogramme obtenu par symétrie de  $T$  par rapport au milieu du segment  $BC$  est un parallélogramme dont les seuls points entiers sont les quatre sommets. C'est donc que  $B - A$  et  $C - A$  forment une base du réseau  $\mathbf{Z}^2$ , autrement dit que la matrice  $2 \times 2$  à coefficients entiers dont les colonnes sont les vecteurs  $B - A$  et  $C - A$  est de déterminant  $\pm 1$ , i.e. que le volume du parallélogramme est 1.

Si les seuls points entiers d'un triangle entier sont sur son bord, on déduit de la formule de Pick que  $\text{card}(T \cap \mathbf{Z}^2) = 2\mathcal{A}(T) + 2$  et cette quantité n'est pas bornée comme le montre l'exemple du triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(d, 0)$  ( $d$  entier positif quelconque). Remarquons aussi qu'en dimension trois, il y a des tétraèdres entiers dont les seuls points entiers sont les sommets et de volume arbitrairement grand comme le montre l'exemple du tétraèdre de sommets  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(1, 1, d)$  ( $d$  entier positif quelconque).

La situation est complètement différente si l'on impose une valeur non nulle pour le nombre de points entiers à l'intérieur d'un polytope entier comme le montre le résultat suivant.

**Théorème.** Soit  $P$  un polytope entier de dimension  $n$  dont le nombre de points entiers intérieurs  $k := \text{card}(P \cap \mathbf{Z}^n)$  est non nul. Si  $n = 2$ , alors  $\text{card}(P \cap \mathbf{Z}^2) \leq 3k + 7$  (Scott, 1976). Si  $n$  est arbitraire, il existe une constante  $B(k, n)$  ne dépendant que de  $k$  et de  $n$  telle que  $\text{vol}(P) \leq B(k, n)$  (Hensley, 1983 ; Lagarias et Ziegler, 1991).

On en déduit immédiatement le résultat suivant à l'aide de l'inégalité de Blichfeldt.

**Corollaire.** Soit  $P$  un polytope entier de dimension  $n$  tel que  $k = \text{card}(P \cap \mathbf{Z}^n) \geq 1$ . Alors il existe une constante  $B(k, n)$  ne dépendant que de  $k$  et de  $n$  telle que  $\text{card}(P \cap \mathbf{Z}^n) \leq n + n!B(k, n)$ .

Autrement dit, le nombre de points entiers sur le bord d'un polytope entier de dimension  $n$  est contrôlé par le nombre de points entiers à l'intérieur de ce polytope... s'il y en a !

La borne obtenue par Hensley est améliorée par Lagarias et Ziegler qui montrent  $B(k, n) \leq k(7(k + 1))^{n2^{n+1}}$ . Il n'y a à ma connaissance pas de conjecture précise sur ce que pourrait être une borne optimale. Si  $\text{card}(P \cap \mathbf{Z}^n) = 1$ , il y a des exemples, dus à Zaks, Perles et Wilks, de polytopes entiers de dimension  $n$  avec  $\text{vol}(P) \geq 2^{2^{n-1}}/n!$  et  $\text{card}(P \cap \mathbf{Z}^n) \geq 2^{2^{n-2}}$ , l'ordre de grandeur est donc essentiellement optimal. L'idée pour démontrer le résultat de Hensley est la même que pour le résultat de Minkowski : connaissant des points entiers intérieurs, il est possible d'en fabriquer d'autres si le volume est trop grand !

**Un résultat de finitude**

Lorsque l'on étudie les polytopes entiers, il faut tenir compte des transformations de l'espace  $\mathbf{R}^n$  préservant le réseau  $\mathbf{Z}^n$  (et donc les notions de points entiers et de polytopes entiers) : ces transformations sont les translations par un vecteur à coordonnées entières et les transformations linéaires  $x \mapsto Ax$  où  $A$  est une matrice de  $\text{GL}_n(\mathbf{Z})$  (i.e. une matrice  $n \times n$  dont les coefficients sont entiers et dont le déterminant est  $\pm 1$  ; une telle matrice préserve donc aussi le volume euclidien). Lagarias et Ziegler déduisent des résultats précédents le théorème de finitude suivant.

**Théorème (Lagarias et Ziegler, 1991).** Pour tout entier  $k \geq 1$ , modulo les translations entières et l'action de  $\text{GL}_n(\mathbf{Z})$ , il n'y a qu'un nombre fini de polytopes entiers de dimension  $n$  dont le nombre de points entiers intérieurs vaut  $k$ .

D'après le théorème de Hensley, le volume d'un polytope entier de dimension  $n$  dont le nombre de points entiers intérieurs vaut  $k$  est majoré par une constante ne dépendant que de  $k$  et  $n$ . Il reste donc à voir qu'il n'y a qu'un nombre fini de tels polytopes, de volume fixé. La démonstration se fait en deux temps. On prouve que si  $K$  est un compact convexe de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$ , et si  $S$  est un simplexe de volume maximal contenu dans  $K$ , alors  $K \subset (-n)S + (n + 1)s$  où  $s$  est le barycentre de  $S$ . On prouve ensuite que si  $S$  est un simplexe entier de volume  $V$ , alors il y a une matrice  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{Z})$  telle que le simplexe  $A(S)$  est inclus dans un cube à sommets

entiers de côté inférieur ou égal à  $n!V$ . On en déduit finalement que pour tout polytope entier  $P$  de volume  $V$ , il y a une matrice  $A \in GL_n(\mathbf{Z})$  telle que le polytope  $A(P)$  est inclus dans un cube à sommets entiers de côté inférieur ou égal à  $nn!V$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini de points entiers dans un cube, le résultat s'ensuit.

En dimension deux, il y a, modulo les translations entières et l'action de  $GL_2(\mathbf{Z})$ , 16 polygones entiers possédant exactement un point entier intérieur (figure 2). Il n'y a pas de classification en dimension supérieure ou égale à trois (il faut s'attendre à une liste très longue, rapidement inaccessible !).

### LES POLYTOPES DE FANO

Nous nous intéressons maintenant à une classe de polytopes entiers très simples.

**Définition.** *Un polytope entier de dimension  $n$  est dit de Fano s'il possède 0 comme seul point intérieur et si toutes ses hyperfaces ont exactement  $n$  sommets formant une base du réseau  $\mathbf{Z}^n$ .*

Si  $P$  est un polytope de Fano et si  $f$  est son nombre d'hyperfaces, alors  $P$  est réunion de  $f$  simplexes standard ayant 0 comme sommet commun. De plus, les points entiers du bord de  $P$  sont exactement les sommets. Il découle des résultats précédents de finitude qu'il n'y a, modulo l'action de  $GL_n(\mathbf{Z})$ , qu'un nombre fini de polytopes de Fano de dimension  $n$  et que le nombre de sommets d'un tel polytope est majoré par une constante ne dépendant que de la dimension. Comme souvent en mathématique, la question qui se pose alors est de classer ces objets, au moins en petites dimensions. Le lecteur est encouragé à vérifier que les seuls polygones de Fano sont les cinq premiers de la figure 2.

A chaque polytope de Fano de dimension  $n$ , nous allons associer une variété algébrique complexe de dimension  $n$  après quelques préliminaires de géométrie algébrique.

### Une introduction rapide à la géométrie algébrique (complexe)

#### Variétés algébriques complexes

Dans ce texte, une variété algébrique complexe de dimension  $n$  est un sous-ensemble  $X$  d'un espace projectif complexe  $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$  de dimension  $N$  (pour un entier  $N \geq n$ ) défini par un système d'équations polynomiales homogènes à coefficients complexes, de sorte que tout point  $x$  de  $X$  possède un voisinage dans  $X$  isomorphe à une boule dans  $\mathbf{C}^n$ . Un point d'une variété algébrique complexe de dimension  $n$  est donc repéré localement par des fonctions holomorphes  $x_1, \dots, x_n$  souvent appelées

« coordonnées locales ». En coupant une variété algébrique  $X$  de dimension  $n$  par des hyperplans de l'espace ambiant, on fabrique des sous-variétés de  $X$ , et si l'on coupe  $X$  par  $n - 1$  hyperplans en position générale, on fabrique des sous-variétés de dimension 1 de  $X$ , appelées courbes (pour d'autres précisions, se reporter à l'article de Serge Cantat dans ce numéro).

#### Hypersurfaces canoniques

Il est bien connu que l'étude des formes différentielles sur une variété permet d'en comprendre un peu la géométrie ou la topologie. Dans ce paragraphe (un peu plus technique que le reste de l'article), nous allons associer à toute sous-variété  $Y$  de dimension  $d$  dans une variété complexe  $X$  un nombre noté  $K_X^d \cdot Y$  qui « mesure » l'intersection de l'ensemble des pôles et des zéros d'une forme volume méromorphe sur  $X$  avec la sous-variété  $Y$ .

Si  $X$  est une variété algébrique complexe de dimension  $n$ , considérons une forme différentielle méromorphe  $\omega_X$  de degré maximal (en coordonnées locales,  $\omega_X = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , où  $f$  est une fonction méromorphe). Cette forme possède des pôles et des zéros localisés le long d'hypersurfaces de  $X$  (i.e des sous-variétés de dimension  $n - 1$  de  $X$ ) : par exemple, la forme  $(x_1^n/x_2^m)dx_1 \wedge dx_2$  a un pôle d'ordre  $m$  le long de l'hyperplan  $\{x_2 = 0\}$  et un zéro d'ordre  $n$  le long de l'hyperplan  $\{x_1 = 0\}$ . A toute forme différentielle méromorphe  $\omega_X$  de degré maximal, on associe une hypersurface canonique de  $X$  de la façon suivante : c'est la somme formelle finie  $K_X := \sum m_i H_i$  où les  $H_i$  sont les hypersurfaces de pôles et de zéros de  $\omega_X$ , et l'entier  $m_i$  est l'ordre du zéro le long de  $H_i$  ou l'opposé de l'ordre du pôle le long de  $H_i$  : dans l'exemple précédent,  $K_X = n\{x_1 = 0\} - m\{x_2 = 0\}$ . Cette hypersurface canonique dépend évidemment du choix de la forme différentielle  $\omega_X$ . En revanche, le théorème des résidus montre que pour toute courbe  $C$  de  $X$ , si l'on note  $H_i \cdot C$  le nombre d'intersection de l'hypersurface  $H_i$  avec la courbe  $C$  (ce nombre est vraiment le nombre de points d'intersection si  $H_i$  et  $C$  se coupent transversalement, sinon il faut tenir compte de l'ordre de contact aux points où  $C$  est tangente à  $H_i$  ; il faut aussi tenir compte des singularités éventuelles de  $C$  et  $H_i$ ), alors l'entier (positif ou négatif)  $K_X \cdot C := \sum m_i H_i \cdot C$  dépend de la courbe  $C$  mais ne dépend pas du choix de la forme différentielle  $\omega_X$ . Plus généralement, si  $Y$  est une sous-variété algébrique de  $X$  de dimension  $d$ , en intersectant  $Y$  avec  $d$  hypersurfaces canoniques, on obtient un entier (positif ou négatif) noté  $K_X^d \cdot Y$ , également indépendant de  $\omega_X$  (voir l'encadré 2 où l'on détaille la situation  $\dim(X) = 1$ ).

#### Variétés de Fano

Parmi les variétés algébriques complexes, une classe se distingue particulièrement : celle des variétés de Fano.



**Encadré 2**

**HYPERSURFACE CANONIQUE DES COURBES ALGÈBRIQUES**

Les courbes algébriques complexes sont topologiquement de trois types (attention, ce sont des objets de dimension 1 complexe, donc de dimension 2 réelle ; on les appelle aussi « surfaces de Riemann ») : la sphère, le tore (ou « bouée à une place ») et le tore à  $g$  trous avec  $g \geq 2$  (ou « bouée multiplaces »). Sur la sphère, il n'y a qu'une structure complexe : celle de la droite projective  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ . Sur le tore, les structures complexes sont de la forme  $\mathbf{C}/\Lambda$  où  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbf{C}$  ; en faisant varier  $\Lambda$ , on ne change pas la

structure topologique alors que la structure complexe (ou conforme) varie. On obtient ainsi une famille de dimension complexe 1 de structures complexes sur un même objet topologique. Sur le tore à  $g$  trous, il y a une famille de dimension complexe  $3g - 3$  de structures complexes. Si  $X$  est une courbe algébrique complexe, la formule de Hurwitz permet de calculer la quantité  $K_X \cdot X$  : elle vaut  $-2$  si  $X$  est une sphère,  $0$  si  $X$  est un tore et  $2g - 2$  si  $X$  est un tore à  $g$  trous.

**Définition.** Une variété algébrique complexe  $X$  de dimension  $n$  est de Fano si  $(-1)^d K_X^d \cdot Y > 0$  pour tout entier  $d$  tel que  $1 \leq d \leq n$  et toute sous-variété algébrique  $Y$  de  $X$  de dimension  $d$ .

Si  $X$  est une variété de Fano, on a en particulier  $K_X \cdot C < 0$  pour toute courbe  $C$  de  $X$ . Cela signifie que les formes différentielles méromorphes de degré maximal ont beaucoup plus de pôles que de zéros et, en particulier, qu'il n'y a pas de forme différentielle holomorphe de degré maximal autre que la forme partout nulle. Les exemples les plus simples de variétés de Fano de dimension  $n$  sont  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  et les hypersurfaces de degré  $d$  de  $\mathbf{P}^{n+1}(\mathbf{C})$  avec  $1 \leq d \leq n + 1$ .

**Une introduction très rapide à la géométrie torique**

*Variétés toriques*

La géométrie torique, née dans les années 1970, est à l'origine l'étude des variétés algébriques qui sont des compactifications équivariantes du tore complexe  $(\mathbf{C}^*)^n$ . Les plus simples sont  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  et  $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^n$ , mais il y en a beaucoup d'autres.

**Définition.** Une variété torique est une variété algébrique complexe  $X$  de dimension  $n$  possédant un ouvert dense isomorphe au tore complexe  $T := (\mathbf{C}^*)^n$  de sorte que l'action de  $T$  sur lui-même (par multiplication) se prolonge en une action (algébrique) sur  $X$ .

En particulier, tout  $t \in T$  définit un automorphisme  $\varphi_t$  de la variété algébrique  $X$  et  $\varphi_{t't} = \varphi_t \circ \varphi_{t'}$  pour tous  $t$  et  $t'$  dans  $T$ . Pour alléger les notations, on note généralement  $t \cdot x = \varphi_t(x)$  pour  $t$  dans  $T$  et  $x$  dans  $X$ . Un exemple

important est l'espace projectif de dimension  $n$  : pour  $t = (t_0, \dots, t_{n-1}) \in T$  et  $x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , on pose  $t \cdot x = [t_0 x_0 : \dots : t_{n-1} x_{n-1} : x_n]$ . Le point essentiel est que les variétés toriques sont codées par des objets combinatoires très simples que nous décrivons maintenant.

*Cônes et éventails*

Un cône rationnel régulier  $\sigma$  de dimension  $r$  de  $\mathbf{R}^n$  est un cône strictement convexe de sommet  $0$  engendré par  $r$  vecteurs  $n_1, \dots, n_r$  de  $\mathbf{Z}^n$  pouvant être complétés en une base du réseau  $\mathbf{Z}^n$ . Le cône  $\sigma$  est donc l'ensemble des combinaisons  $\sum_{i=1}^r \lambda_i n_i$  où les  $\lambda_i$  sont des réels positifs ou nuls. Par exemple, le cône engendré par  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$  dans  $\mathbf{R}^2$  est régulier, celui engendré par  $(1, 0)$  et  $(1, 2)$  ne l'est pas puisque la famille  $\{(1, 0), (1, 2)\}$  n'est pas une base de  $\mathbf{Z}^2$ . Un éventail régulier de  $\mathbf{R}^n$  est une collection finie  $\Delta$  de cônes rationnels réguliers recouvrant  $\mathbf{R}^n$  et vérifiant les deux conditions suivantes : si  $\sigma$  appartient à  $\Delta$ , alors toutes ses faces sont dans  $\Delta$  (remarquer que  $0$  est face de tout cône), et si  $\sigma$  et  $\sigma'$  appartiennent à  $\Delta$ , alors  $\sigma \cap \sigma'$  est une face commune de  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Voici deux éventails de  $\mathbf{R}^2$ , le premier est constitué de 7 cônes (3 de dimension deux, 3 de dimension un et 1 de dimension zéro), le second de 9 cônes.

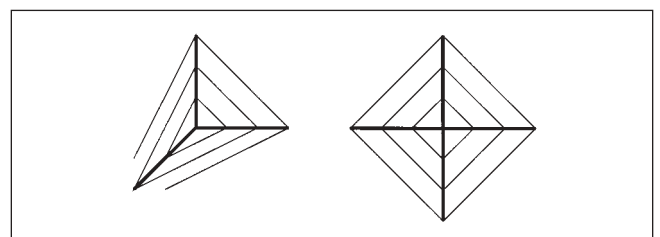


Figure 3 - Deux éventails de  $\mathbf{R}^2$ .

Soit  $X$  une variété torique de dimension  $n$ . Comme  $T \subset X$ , il y a dans  $X$  un point particulier :  $x_e = (1, \dots, 1) \in T \subset X$ . Pour chaque  $v \in \mathbf{Z}^n$ , il y a une action du tore  $\mathbf{C}^*$  de dimension 1 sur  $X$  définie par  $z \cdot_v x = (z^{v_1}, \dots, z^{v_n}) \cdot x$  où  $z \in \mathbf{C}^*$ ,  $x \in X$  et  $v_1, \dots, v_n$  sont les coordonnées (entières) de  $v$ . Nous construisons un éventail en regardant les limites possibles (lorsque  $z$  tend vers 0) lorsque  $v$  décrit  $\mathbf{Z}^n$  des orbites du point  $x_e$ . Comme  $X$  est compacte et l'action algébrique,  $\lim_{z \rightarrow 0} (z \cdot_v x_e)$  existe dans  $X$  et l'observation clé est la suivante :

**Proposition.** *Il y a un éventail  $\Delta_X$  tel que l'ensemble des  $C_x := \{v \in \mathbf{Z}^n \mid \lim_{z \rightarrow 0} (z \cdot_v x_e) = x\}$  lorsque  $x$  décrit  $X$  est exactement l'ensemble (fini) des  $\overset{\circ}{\sigma} \cap \mathbf{Z}^n$  lorsque  $\sigma$  décrit  $\Delta_X$  (où  $\overset{\circ}{\sigma}$  est l'intérieur de  $\sigma$  dans l'espace vectoriel engendré par  $\sigma$ ).*

Nous ne démontrons pas cette proposition ici mais nous encourageons vivement le lecteur à vérifier que le premier éventail de la figure 3 est celui du plan projectif  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  et le deuxième celui de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ .

Cette construction admet une réciproque : tout éventail régulier détermine une variété torique.

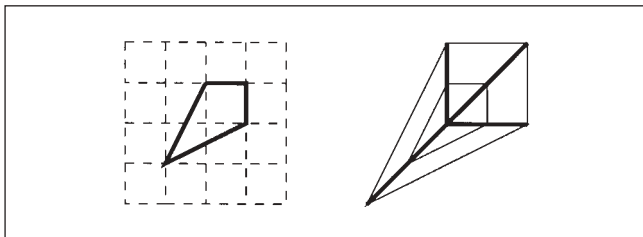


Figure 4 - Un polygone de Fano et l'éventail associé.

Il est maintenant grand temps de revenir aux polytopes...

### Variétés de Fano toriques

A tout polytope de Fano  $P$  est naturellement associé un éventail régulier de la façon suivante : pour chaque hyperface  $F$  de  $P$ , le cône de sommet 0 et s'appuyant sur  $F$  est un cône régulier. La collection de tous ces cônes et de leurs faces est clairement un éventail régulier (figure 4).

D'après ce qui précède,  $P$  détermine donc une variété torique  $X_P$  et il n'est pas très difficile de démontrer la proposition suivante, que le lecteur a sans doute déjà devinée.

**Proposition.** *Il y a une correspondance bijective entre les polytopes de Fano de dimension  $n$  et les variétés de Fano toriques de dimension  $n$ .*

En utilisant à la fois des méthodes combinatoires et des méthodes venant de la théorie de Mori (encadré 4), il est possible de donner une liste de toutes les variétés de Fano toriques de dimension inférieure ou égale à 4 : il n'y a que  $\mathbf{P}^1$  en dimension 1 et respectivement 5, 18 et 124 variétés de Fano toriques de dimension respectivement 2, 3 et 4. Ces classifications sont dues à Watanabe, Watanabe et Batyrev en dimension 3 et à Batyrev et Sato en dimension 4. Dans le cas des surfaces de Fano toriques, nous avons déjà mentionné que les polygones de Fano associés sont les 5 premiers de la figure 2 (encadré 3).

En utilisant ces résultats de classification, on remarque qu'un polytope de Fano de dimension respectivement 1, 2, 3 ou 4 possède au plus 2, 6, 8 ou 12 sommets respectivement. Ces résultats vont dans le sens d'une conjecture de Batyrev que nous énonçons maintenant.

### Encadré 3

## ÉCLATEMENTS ET SURFACES DE FANO TORIQUES

Si  $S$  est une surface complexe et  $x$  un point de  $S$ , il y a un procédé essentiel en géométrie algébrique permettant de construire une nouvelle surface  $S_x$  en remplaçant le point  $x$  par la droite projective des directions tangentes à  $S$  en  $x$  : ce procédé est local car il ne modifie  $S$  qu'au voisinage de  $x$  et on dit qu'on éclate le point  $x$  dans  $S$ . Le modèle local est le suivant : souvenons nous que  $\mathbf{P}^1$  est naturellement l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbf{C}^2$ , l'éclatement de 0 dans  $\mathbf{C}^2$  est la

surface  $(\mathbf{C}^2)_0$  définie par :  $(\mathbf{C}^2)_0 = \{(v, d) \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1 \mid v \in d\}$ . La structure complexe de la variété  $S_x$  dépend du choix de  $x$  mais sa topologie n'en dépend pas : en faisant varier  $x$  dans  $S$ , on obtient un exemple de famille de structures complexes. Les 5 surfaces de Fano toriques sont  $\mathbf{P}^2$ ,  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  et les surfaces obtenues en éclatant respectivement un, deux ou trois points fixes du tore dans  $\mathbf{P}^2$ .

**Conjecture (Batyrev, 1988).** *Tout polytope de Fano de dimension  $n$  possède au plus  $3n$  sommets si  $n$  est pair et  $3n - 1$  sommets si  $n$  est impair.*

On peut remarquer que ces bornes sont beaucoup plus petites que celles données par le résultat de Hensley. Debarre a montré très récemment que *le nombre de sommets d'un polytope de Fano de dimension  $n$  est inférieur ou égal à  $n + 2 + 2\sqrt{(n^2 - 1)(2n - 1)}$*  et Casagrande a démontré la conjecture de Batyrev en dimension 5 (où il n'y a pas de classification). A nouveau, les techniques de Casagrande viennent de la géométrie torique. Nous avons besoin pour cela d'une notion supplémentaire de la géométrie algébrique.

Si  $X$  est une sous-variété algébrique d'un espace projectif complexe, considérons l'espace vectoriel des combinaisons finies  $\sum a_i C_i$  où les  $a_i$  sont des nombres réels et les  $C_i$  des courbes de  $X$ . Cet espace est de dimension infinie mais devient de dimension finie si l'on identifie deux combinaisons  $\sum a_i C_i$  et  $\sum b_i C_i$  si et seulement si pour toute hypersurface  $H$  de  $X$ , on a  $\sum a_i C_i \cdot H = \sum b_i C_i \cdot H$  (par exemple, dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ , deux courbes sont identifiées si leurs nombre d'intersection avec toute droite sont égaux, autrement dit si elles ont le même degré). La dimension de l'espace ainsi obtenu est appelée *nombre de Picard* de la variété  $X$  et est notée généralement  $\rho_X$ .

Pour une variété de Fano torique  $X_P$  de dimension  $n$  dont le polytope de Fano associé est  $P$ , le nombre de sommets de  $P$  est égal à  $n + \rho_{X_P}$ , si bien que la con-

jecture de Batyrev se reformule ainsi : *le nombre de Picard d'une variété de Fano torique de dimension  $n$  est inférieur ou égal à  $2n$  si  $n$  est pair et à  $2n - 1$  si  $n$  est impair.*

Il n'y a à ma connaissance pas de conjecture précise sur le nombre de Picard d'une variété de Fano arbitraire (i.e. non torique) mais on s'attend à une borne linéaire vis-à-vis de la dimension.

#### CONCLUSION

Ces dernières années, de nombreuses conjectures de la géométrie algébrique ont été testées sur les variétés toriques et, pour certaines, démontrées à l'aide de la géométrie torique. Cependant, de nombreuses questions restent encore ouvertes. Donnons-en une parmi tant d'autres pour conclure ce texte.

Soit  $X$  une variété algébrique complexe telle que  $K_X \cdot C \leq 0$  pour toute courbe  $C$  de  $X$ . Le théorème de Hensley montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de telles variétés *toriques* de dimension donnée. La question analogue dans le monde non torique serait la suivante : *y a-t-il un nombre fini de types de déformation de telles variétés de dimension donnée ?* Cette question est redoutablement difficile et complètement ouverte dès la dimension trois, y compris pour les variétés de Calabi-Yau, chères à certains physiciens (ce sont des variétés de dimension trois telles que  $K_X \cdot C = 0$  pour toute courbe  $C$ ) et ce, malgré des dizaines de travaux sur le sujet ces dix dernières années !

#### Encadré 4

### VARIÉTÉS DE FANO ET THÉORIE DE MORI

*Les variétés de Fano occupent une place essentielle dans la théorie communément appelée « géométrie algébrique de dimension supérieure » (sous-entendu : supérieure ou égale à trois) depuis une vingtaine d'années et les travaux pionniers de Mori. L'idée de Mori est d'étudier une variété algébrique  $X$  à l'aide des courbes  $C$  de  $X$  telles que  $K_X \cdot C < 0$  et de montrer qu'après un nombre fini de « chirurgies biméromorphes », il y a une application  $f : X \rightarrow Z$  où  $Z$  est une variété algébrique de dimension plus petite telle que  $K_Z \cdot C \geq 0$  pour toute courbe de  $Z$  et telle que les fibres de  $f$  sont des variétés de Fano (en un sens un peu plus général que celui de la définition ci-dessus), les variétés de Fano sont donc des « briques élémentaires » dans la classification des variétés algébriques. Ce programme dit « programme du modèle minimal » ou encore « programme de Mori » est achevé jusqu'en dimension trois et a valu la médaille Fields à Mori. En toute dimension, les travaux de Nadel, Campana et*

*de Kollár, Miyaoka et Mori montrent au début des années 1990 le résultat fondamental suivant : il n'y a qu'un nombre fini de types de déformation de variétés (complexes) de Fano de dimension fixée. En dimension inférieure ou égale à trois, des classifications complètes existent : il n'y a qu'une courbe de Fano (la droite projective  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ), 10 familles de surfaces de Fano (il s'agit de  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  et de  $\mathbf{P}^2$  éclaté en au plus 8 points en position générale, voir l'encadré 3 pour cette notion), 105 familles de variétés de Fano de dimension trois, ces dernières ont été classifiées par Iskovskih, Mori et Mukai (mentionnons au lecteur que Mori a annoncé en septembre 2002 l'existence de la 105<sup>e</sup> famille de variétés de Fano de dimension trois, la classification publiée il y a une vingtaine d'années n'en comportait que 104 !). La démonstration de ces résultats utilise tout l'attirail de la géométrie algébrique moderne.*

## POUR EN SAVOIR PLUS

**Bonavero (L.)**, Factorisation faible des applications birationnelles, d'après Abramovich *et al.*, *Séminaire Bourbaki*, Volume 2000/2001, Paris, Société mathématique de France, Astérisque No. 282, Exp. N° 880, 2002, 1-37.

**Brion (M.)**, Points entiers dans les polytopes convexes, *Séminaire Bourbaki*, Volume 1993/94, Paris, Société mathématique de France, Astérisque N° 227, Exp. N° 780, 1995, 145-169.

**Cassels (J.W.S.)**, An Introduction to the Geometry of Numbers, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 99 Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.

**Debarre (O.)**, Higher-dimensional algebraic geometry, *Universitext*, Springer-Verlag, New York, 2001.

**Ewald (G.)**, Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry, *Graduate Texts in Mathematics*, N° 168, Springer-Verlag, New York, 1996.

**Lagarias (J.-C.), Ziegler (G.)**, Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice, *Canad. J. Math.* 43, n° 5, 1991, 1022-1035.

**Oda (T.)**, Convex Bodies and Algebraic Geometry: an Introduction to the Theory of Toric Varieties, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge.*, 015. Springer, 1988.

**Wiśniewski (J.-A.)**, Toric Mori Theory and Fano Manifolds, dans *Geometry of Toric Varieties*, Laurent Bonavero – Michel Brion (Ed.) *Séminaires et Congrès* 6, 2002, 249-272.

---

### Note de l'auteur

Je remercie tous ceux qui ont critiqué les premières versions de ce texte.