

Mathématiques et turbulence

En ce début de millénaire, la « turbulence » est l'une des grandes questions fondamentales qui reste sur le métier du physicien. De leur côté, d'éminents mathématiciens ont distingué la résolution des équations de Navier-Stokes comme l'un des problèmes clé pour l'avenir de leur discipline. Quel est le lien entre les préoccupations des uns et des autres ? C'est ce que je me propose d'examiner ici.

Comme tous les mathématiciens ne sont pas forcément familiers avec la mécanique des fluides, je vais commencer par les quelques généralités d'usage.

L'OBJET DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

Le but de la mécanique des fluides est de décrire et calculer les différents types d'écoulements fluides que nous pouvons observer. La difficulté de cette entreprise apparaît immédiatement en faisant une expérience simple (et qui ne coûte pas cher).

Observons la fumée d'une cigarette montant dans l'air calme : que voit-on ? Sur quelques dizaines de centimètres, la fumée s'élève tranquillement et les particules de fumée nous paraissent suivre des trajectoires régulières, sensiblement parallèles, qu'elles décrivent de manière uniforme ; puis sur une dizaine de centimètres environ, cet ordonnancement se disloque au profit de quelques tourbillons d'une taille comparable à la largeur de la colonne de fumée ; ils évoluent et se déforment en s'élevant pour brusquement laisser place à un mouvement tellement désordonné qu'on ne peut plus suivre à l'œil la trajectoire d'une particule.

Dans la zone basse, l'écoulement ordonné est appelé laminaire ; dans la plus haute, il est dit turbulent, tandis que la zone intermédiaire est baptisée zone de transition.

Dans ces trois zones, les conditions dans lesquelles s'effectue l'écoulement sont voisines et pourtant, les comportements sont très différents. Si l'on admet que ces mouvements sont représentés par une même équation cela laisse présager que la résolution de cette équation va donner du fil à retordre.

La connaissance des deux premiers régimes a fait des progrès si considérables au cours du xx^e siècle que l'on peut les considérer comme bien connus ; le troisième en revanche demeure une énigme.

LES ÉQUATIONS D'EULER ET NAVIER-STOKES

La première équation décrivant le mouvement d'un milieu continu fluide a été écrite par Euler en 1755 : c'est l'équation (ou plutôt les équations) du fluide parfait (sans frottement interne).

Sous leur forme la plus usuelle, les équations du mouvement (équations d'Euler) pour un fluide parfait incompressible, occupant un domaine Ω de l'espace, s'écrivent :

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

où $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ est le champ de vitesse du fluide et $p(t, \mathbf{x})$ sa pression. A ces équations, il faut ajouter une condition limite pour la vitesse au bord $\partial\Omega$ du domaine : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ (\mathbf{n} désigne le vecteur normal unitaire sortant au bord du domaine). Pour déterminer complètement le mouvement du fluide, il nous faudra en outre fixer une condition initiale $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ (i.e. résoudre le problème de Cauchy).

Il est assez piquant de noter que c'est (avec celle des cordes vibrantes) la première EDP de physique mathématique qui ait été écrite, et elle résiste encore...

Il a fallu ensuite un certain temps avant que l'on sache modéliser le frottement interne, et l'équation du fluide visqueux (équation de Navier-Stokes) a été obtenue par Navier en 1824. Elle s'écrit (en supposant toujours le fluide incompressible, de masse volumique constante égale à 1) :

$$(N-S) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p, \text{ sur } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Le paramètre ν est la viscosité cinématique (normalisée par la masse volumique) du fluide et il faut bien sûr rajouter une condition au bord du domaine, la plus couramment employée étant celle de Stokes $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$. Il faut également fixer la condition initiale $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

Une fois ces équations écrites, venons-en à une caractéristique physique importante des écoulements : le **nombre de Reynolds**.

Dans l'équation de N-S, le terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ est appelé terme convectif : c'est un terme non linéaire générateur d'instabilités et c'est lui qui est tenu pour responsable de l'aspect turbulent lorsqu'il advient ; le terme $\nu \Delta \mathbf{u}$ est le terme visqueux ; il a l'effet contraire de lisser l'écoulement et de lui donner un caractère laminaire. C'est l'ordre de grandeur du rapport entre ces deux termes qui va conditionner l'aspect de l'écoulement. On définit ainsi le nombre (sans dimension) de Reynolds de l'écoulement :

$$\text{Re} = \frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|}{|\nu \Delta \mathbf{u}|} \approx \frac{UL}{\nu},$$

où L et U sont respectivement des longueur et vitesse caractéristiques de l'écoulement.

L'observation expérimentale nous dit maintenant qu'il existe un nombre de Reynolds critique Re^* tel que, pour $\text{Re} < \text{Re}^*$, l'écoulement soit laminaire, et turbulent pour $\text{Re} > \text{Re}^*$. Évidemment, Re^* n'est pas universel ; il va dépendre de la géométrie du domaine et du type de condition initiale... mais disons qu'en gros il est de l'ordre de 100.

Sachant que pour l'air la viscosité cinématique est de $0,15 \text{ cm}^2/\text{s}$, on peut tout de suite obtenir quelques ordres de grandeur.

Écoulement autour d'une automobile :

$$\text{Re} \approx 10^7 \quad (U = 100 \text{ km/h}, L = 4\text{m}).$$

Écoulement météorologique :

$$\text{Re} \approx 10^{12} \quad (U = 10 \text{ m/s}, L = 1000 \text{ km}).$$

Vol d'une mouche :

$$\text{Re} \approx 300 \quad (U = 1 \text{ m/s}, L = 0,5 \text{ cm}).$$

On voit donc que la plupart des écoulements qui se situent à notre échelle sont pleinement turbulents ; la mouche, elle, évolue constamment dans la zone de transition laminaire-turbulent, ce qui doit certainement lui poser des problèmes de contrôle de vol tout à fait intéressants ; *idem* pour la fumée de cigarette, ce qui explique que l'on puisse observer les trois régimes simultanément.

Il est commode d'écrire les équations de N-S de manière adimensionnée (en faisant les changements d'échelle appropriés) ; on obtient alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} = -\nabla p.$$

MATHÉMATIQUE DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET EULER

L'essentiel de ce que l'on sait sur la résolution du problème de Cauchy pour les équations N-S, avec une donnée initiale $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^3 , remonte aux travaux de Leray (1933-34).

Théorème. *Si $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ est suffisamment régulière sur $\overline{\Omega}$ et vérifie $\text{div } \mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{u}_0 = 0$ sur $\partial\Omega$, il existe une solution classique unique pendant un intervalle de temps $[0, T^*]$. Au-delà de T^* , il existe une solution moins régulière (solution faible) dont on ne sait pas montrer l'unicité.*

L'énoncé volontairement un peu vague de ce résultat appelle quelques commentaires.

– Par « suffisamment régulière » on entend que \mathbf{u} ainsi que son gradient (pris au sens des distributions) sont de carré intégrable sur Ω .

– Le temps $T^* > 0$ dépend bien sûr de $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$; il est d'autant plus petit que \mathbf{u}_0 est « grand ».

– Sens de la notion de solution faible. Si \mathbf{u} n'est pas régulier, le terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ n'a, *a priori*, pas de sens. On peut lui en donner un : en utilisant la condition $\text{div } \mathbf{u} = 0$, on voit que pour \mathbf{u} régulier $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \partial_i(u_i \mathbf{u})$ et que cette dernière expression existe au sens des distributions dès que \mathbf{u} est de carré intégrable. Il suffit donc d'écrire le terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ sous cette forme et de considérer que l'équation est vérifiée au sens des distributions sur Ω .

– La turbulence selon Leray. Le mouvement devient turbulent au moment où la solution régulière laisse place à une solution faible qui peut avoir du tourbillon (vorticité) $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ infini en certains points.

– La question « la solution cesse-t-elle vraiment d'être régulière au bout d'un temps fini ? » est l'objet du prix Clay.

On voit que ce théorème règle en fait la situation des écoulements laminaires, mais le cas turbulent (qui correspond à \mathbf{u}_0 ou T^* grand) lui échappe complètement car la seule existence sans unicité d'une solution faible est physiquement inconsistante.

Et l'équation d'Euler ?

Le premier résultat important faisant le pendant avec celui de Leray remonte à Kato (1972).

Théorème. *Si \mathbf{u}_0 est assez régulière, avec $\text{div } \mathbf{u}_0 = 0$ et $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, il existe un temps $T^* > 0$ et une solution classique unique de (E) sur l'intervalle de temps $[0, T^*]$.*

Commentaires

- Ici, la régularité va s'exprimer par la vérification d'une condition de Hölder pour les dérivées de u_0 .
- On ne sait rien sur l'existence d'éventuelles solutions faibles pour $t > T^*$.
- On vérifie aisément que, pour une solution régulière, l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx$ est conservée.

Si l'on veut maintenant résumer la situation, on peut dire qu'après pratiquement un siècle d'efforts acharnés on a mis en correspondance une énigme physique avec un problème mathématique extrêmement ardu. Il semblerait donc que, pour l'instant, on n'ait pas gagné grand chose.

Pour dépasser ce constat accablant, il nous faut maintenant être plus précis sur ce qu'attend le physicien.

RETOUR A LA PHYSIQUE : QUE VEUT-ON EXPLIQUER ?

On a vu dans ce qui précède que la situation turbulente correspond à Re grand.

Le nombre de degrés de liberté

Bien qu'en toute rigueur la description en terme de champ de vitesse d'un écoulement fluide implique un nombre de degrés de liberté infini, un raisonnement heuristique dû à Kolmogorov suggère qu'un écoulement visqueux ne dépend en fait que d'un nombre fini de degrés de liberté, de l'ordre de $Re^{9/4}$. Ce nombre représente la dimension de l'espace d'approximants qu'il faudrait prendre pour faire un calcul numérique raisonnable de la solution.

On voit que le nombre de degrés de liberté devient vite gigantesque dans un écoulement turbulent : pour le cas de la météorologie où nous avons estimé $Re = 10^{12}$, on obtient 10^{27} ! C'est pourquoi la turbulence pose aujourd'hui, et posera encore demain, un sérieux problème de calcul numérique effectif.

Notons au passage que le raisonnement de Kolmogorov suppose que la solution de Navier-Stokes est suffisamment régulière pour qu'à petite échelle, u puisse être considéré comme sensiblement constant, ce qui est justement, pour le mathématicien, le fond du problème. En tout état de cause, nous retiendrons que l'état turbulent correspond à un très grand nombre de degrés de liberté.

Venons-en maintenant à ce que le physicien observe dans les écoulements turbulents. Pour cela, nous allons considérer deux cas bien distincts, suivant que l'écoulement s'effectue en dimension deux ou trois. Cette distinction n'a rien d'académique, c'est le reflet des phénomènes observés. L'approximation bidimensionnelle

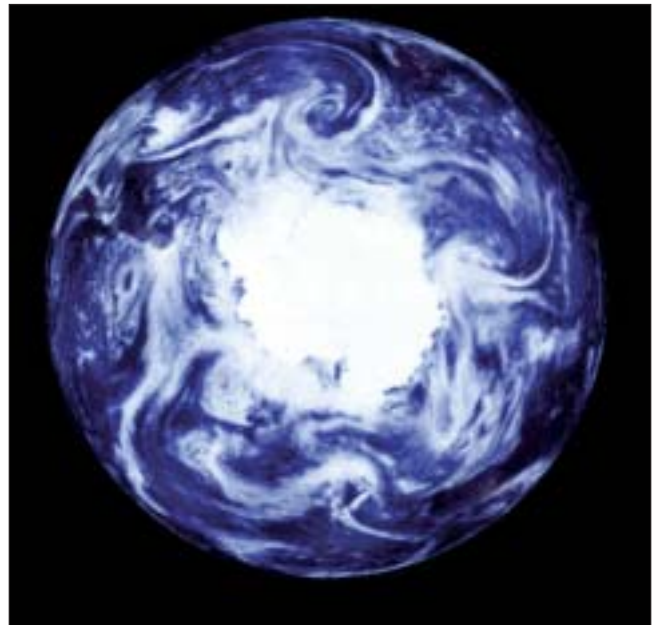


Figure 1 - Sur cette photographie satellite, on observe un système de quelques grands tourbillons atmosphériques, alternance d'anticyclones et de dépressions, entourant le pôle sud. Ces formations sont des « structures cohérentes » créées par l'auto-organisation caractéristique des écoulements turbulents bidimensionnels (photo NASA, mission Galileo).

(l'écoulement a lieu dans un plan ou sur une surface) est souvent utilisée en pratique lorsque le fluide est confiné dans une couche de faible épaisseur. Ainsi, lorsque l'épaisseur des couches fluides est négligeable par rapport aux échelles horizontales considérées, les mouvements de l'atmosphère ou des océans peuvent être considérés comme bidimensionnels.

Les traits principaux de la turbulence à deux dimensions sont la conservation de l'énergie cinétique et la tendance à former de grands tourbillons organisés stables (on les nomme structures cohérentes ; figure 1).

Par contraste, en dimension 3 (écoulement dans une soufflerie par exemple), il y a une forte dissipation d'énergie cinétique et on n'observe généralement pas de structures organisées. Les observations quantitatives reproductibles concernent le spectre d'énergie cinétique et la répartition statistique des incréments de vitesse $u(t, x) - u(t, x')$ pour des points voisins x et x' .

Onsager fut le premier à distinguer aussi clairement les phénomènes à expliquer.

LA TURBULENCE EN DIMENSION 2

Suivant Onsager, il faut expliquer la conservation de l'énergie cinétique et l'apparition de structures organisées. Pour Onsager, l'équation d'Euler est parfaitement adaptée, car elle conserve l'énergie, et l'apparition générale de ces structures doit s'expliquer par une mécanique statistique de l'équilibre.

Un petit retour aux équations d'Euler et Navier-Stokes va nous éclairer.

En dimension 2 il se passe quelque chose de tout à fait remarquable : les avatars du théorème de Leray disparaissent :

- Pour \mathbf{u}_0 régulière, la solution régulière de N-S existe pour tout temps.
- Pour \mathbf{u}_0 peu régulière, la solution faible est unique.

De même pour l'équation d'Euler, la situation devient satisfaisante. En effet, en prenant le rotationnel de l'équation (E), on obtient l'équation en $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ (la vortacité ω est maintenant une fonction scalaire) :

$$(E_\omega) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div}(\omega \mathbf{u}) = 0, \\ \text{rot } \mathbf{u} = \omega, \text{div } \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

C'est une équation de transport (de ω par \mathbf{u}) couplée avec un système elliptique (\mathbf{u} fonction de ω). On en déduit le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème (Youdovitch 1963). *Pour toute fonction mesurable bornée ω_0 , il existe une solution faible mesurable et bornée $\omega(t, x)$ au problème (E_ω) , admettant ω_0 comme condition initiale. Cette solution est unique.*

Remarque

La situation se complique considérablement si l'on s'autorise à prendre pour ω_0 une mesure, par exemple si le champ de vitesse initial est discontinu ; ce problème (dit des feuilles de tourbillon) n'est pas dénué de sens physique. Mais ici, une vortacité initiale bornée suffira à notre propos.

Autre fait rassurant en dimension 2 : sous des conditions raisonnables, lorsque la viscosité tend vers zéro, la solution de Navier-Stokes correspondant à la donnée initiale \mathbf{u}_0 tend vers la solution de l'équation d'Euler de même donnée initiale. Par conditions raisonnables, on entend soit que l'on est dans le cas de solutions spatialement périodiques (écoulements sur le tore), soit que l'on remplace la condition de Stokes $\mathbf{u} = 0$ au bord du domaine par une condition de friction sur le bord (qui est en fait celle qui avait été primitivement proposée par Navier) qui, dans bien des cas, est physiquement plus réaliste.

On déduit des considérations ci-dessus qu'il est tout à fait légitime d'étudier la turbulence 2D en prenant pour modèle l'équation d'Euler, qui donne bien le comportement des fluides dans la limite des faibles viscosités.

C'est ce qu'avait bien pressenti Onsager. Comme on peut montrer que la solution donnée par le théorème de

Youdovitch conserve l'énergie, la première propriété de la turbulence 2D est clairement expliquée.

La formation des structures organisées est une question plus complexe. Que se passe-t-il donc pour la solution de l'équation d'Euler ? Grâce à la simulation numérique, ce qui se passe est bien connu et peut être décrit de manière imagée en prenant pour ω_0 une tache de tourbillon (ω_0 vaut une valeur constante sur une certaine région et 0 en dehors). Comme la vortacité ω est simplement transportée par un champ de vitesse incompressible, ω va demeurer une tache de même surface à chaque instant mais cette tache va, en général, se déformer de manière extrêmement complexe en émettant des filaments de plus en plus fins au fur et à mesure qu'ils se déforment et s'enroulent ; autrement dit, ω se met à osciller à des échelles spatiales de plus en plus petites. Si l'on se contente d'observer ainsi le flot de manière détaillée à petite échelle, ω devient de plus en plus compliquée et ne converge vers rien du tout ; c'est pourquoi on parle de chaos turbulent à petite échelle. Si maintenant on cesse d'observer les détails et on fait une moyenne locale de ω à une certaine échelle intermédiaire fixée, on peut constater que cette moyenne converge ; autrement dit, pour t tendant vers l'infini, $\omega(t, x)$ va converger pour la topologie faible vers une certaine fonction ω^* (voir figure 2). Comme le relèvement ($\omega \rightarrow \mathbf{u}$) est compact, il s'ensuit que \mathbf{u} converge pour la norme L^2 vers le champ de vitesse correspondant \mathbf{u}^* . Cet \mathbf{u}^* est le champ de vitesse qui décrit la structure organisée.

Comment montrer « qu'en général » les choses se passent ainsi pour la solution des équations d'Euler ? On ne sait pas le faire pour l'instant. En revanche, pour un ω_0 donné, on sait trouver le bon candidat pour la limite ω^* .

*Détermination de ω^**

Pour ce faire, on met en œuvre le programme d'Onsager qui revient à étendre à l'équation d'Euler la mécanique statistique de Boltzmann. La première étape consiste, au moyen de la théorie des grandes déviations, à construire la fonctionnelle entropie qui mesure précisément la notion intuitive de désordre associée à un écoulement turbulent. La seconde est de résoudre le problème variationnel consistant à maximiser cette entropie sous les contraintes associées à tous les invariants de l'équation d'Euler. Le tout donne ω^* .

Reste à démontrer que ω converge bien vers ω^* , et on ne sait pas le faire. Comme tout résultat fourni par la mécanique statistique, il faudrait pour le justifier démontrer, en un sens approprié, l'ergodicité du système dynamique défini par l'équation d'Euler 2D (système hamiltonien de dimension infinie). On peut en revanche vérifier par des simulations numériques et des expériences en laboratoire que le comportement est correctement décrit.

LA TURBULENCE EN DIMENSION 3

En dimension trois, on dispose d'observations et de mesures faites en soufflerie ; le tout est résumé depuis de nombreuses décennies sous la forme de quelques grandes lois expérimentales.

Notons tout d'abord que l'on n'observe généralement pas la formation de structures comme en dimension deux.

La première loi concerne la dissipation d'énergie ; elle est formulée d'une manière assez étonnante car elle fait appel à une opération par la pensée.

Loi de la dissipation d'énergie

Dans une expérience de turbulence, tout le reste étant fixé, si la viscosité tend vers zéro la dissipation d'énergie cinétique par unité de masse tend vers une limite non nulle :

$$\frac{dE}{dt} \longrightarrow D,$$

D , qui a pour dimension L^2T^{-3} , est fonction de « l'intensité » de la turbulence.

$\frac{dE}{dt}$ désigne ici une quantité moyenne, prise sur tout le domaine.

Ainsi donc, la dissipation d'énergie dans un flot turbulent 3D ne dépend pas de la viscosité.

Loi des 2/3

Considérons une portion Ω du domaine dans lequel s'effectue l'écoulement turbulent ; à chaque instant t fixé, et on a :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(t, x + \xi) - \mathbf{u}(t, x)|^2 dx \approx \text{cte} |\xi|^{2/3}.$$

La constante du second membre ne dépend pas de Ω mais uniquement de D .

Cette deuxième loi donne une information importante sur la régularité du champ de vitesse turbulent.

A la première loi s'en associe naturellement une autre, qui n'est pas expérimentale et jouit d'un statut particulier, car c'est la seule loi sur la turbulence que l'on sache « démontrer » (au sens physique du terme) à partir de la dynamique du système (équation de Navier-Stokes).

La loi du 4/5

Elle est issue des calculs de Von Karmàn et Howarth en 1938, complétés par Kolmogorov en 1941. Une ver-

sion plus générale (sans hypothèse d'isotropie) très intéressante en a été donnée par Monin en 1959.

Pour énoncer cette loi, on suppose que le champ de vitesse turbulent est représenté par une solution aléatoire des équations de Navier-Stokes $\mathbf{u}(t, x, a)$ (a désignant le paramètre aléatoire), c'est-à-dire que pour tout a fixé $\mathbf{u}(t, x, a)$ est une solution des équations de Navier-Stokes (en un sens qui ne peut être que faible car, d'après la loi des 2/3, le champ ne peut pas être bien régulier). On fait quelques hypothèses sur ce champ aléatoire.

(i) Il est de moyenne nulle : pour tous t, x on a $\langle \mathbf{u}(t, x, a) \rangle = 0$, $\langle \rangle$ désignant la moyenne d'ensemble.

(ii) Il est homogène en espace : pour tous t, ξ , le champ aléatoire $\mathbf{u}(t, x + \xi, a)$ a la même loi que $\mathbf{u}(t, x, a)$.

(iii) Il est isotrope au sens fort : pour toute matrice réelle unitaire A , le champ aléatoire ${}^t A \mathbf{u}(t, Ax, a)$ a la même loi que $\mathbf{u}(t, x, a)$.

On note $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x + \xi, a) - \mathbf{u}(t, x, a)$, et la loi du 4/5 s'énonce alors :

$$(4/5) \quad \left\langle \left(\delta \mathbf{u} \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right)^3 \right\rangle = -\frac{4}{5} D |\xi|.$$

Commentaires

1. D est la constante qui intervient dans la loi de dissipation ; la formule ci-dessus relie donc de manière étonnamment simple la dissipation d'énergie du flot turbulent à la statistique des incréments de vitesse.

2. On n'a pas fait d'hypothèse de stationnarité sur le champ \mathbf{u} , ni d'hypothèse d'invariance par changement d'échelle.

3. Il existe une version non isotrope de ce résultat (Monin) qui s'exprime :

$$D = -\frac{1}{4} \text{div}_{\xi} \langle (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u} \rangle_{\xi=0}.$$

4. La formule (4/5) s'obtient par des manipulations formelles à partir de l'équation de Navier-Stokes, puis en prenant la limite ($\nu \rightarrow 0$). La justification mathématique de la méthode paraît inaccessible avec des hypothèses raisonnables sur le champ de vitesse (j'entends par là des hypothèses que l'on sait expérimentalement vérifiées par le champ turbulent et pas plus). Cette loi n'en est pas moins considérée comme parfaitement valide par les physiciens de la turbulence (cf. Frisch).

Une théorie convenable de la turbulence doit retrouver rigoureusement ces lois à partir des équations du mouvement fluide (Navier-Stokes ou Euler). Mais le choix du

modèle de base pour le faire nous plonge d'entrée dans la perplexité.

Visqueux ou pas visqueux ?

On a montré au paragraphe précédent qu'en dimension 2, la clarification mathématique du problème permettait d'étudier la turbulence à partir de l'équation d'Euler, ce qui simplifiait considérablement les choses. Qu'en est-il en dimension 3 ? Comme on l'a vu, les résultats connus jusqu'à ce jour ne sont pas d'un grand secours.

Le fait que la dissipation d'énergie soit importante a conduit une grande majorité de physiciens à penser que la viscosité, même évanescence, continue à jouer un rôle. Il faut donc étudier l'équation de Navier-Stokes, quitte ensuite à opérer un passage à la limite ($\nu \rightarrow 0$). C'était aussi le point de vue de Leray. En effet, celui-ci se méfiait de l'équation d'Euler à cause du paradoxe de d'Alembert¹, paradoxe que l'on peut effectivement présenter comme la partie la plus visible d'un iceberg d'avatars contenus dans cette équation, comme par exemple la non-unicité au problème de Cauchy, mais c'est une autre histoire...

Je vais maintenant présenter une autre façon de voir les choses, qui a été quelque peu oubliée : elle est due à Onsager².

Pour Onsager, il saute aux yeux dans la loi du 4/5 que la viscosité n'intervient pas ; la dissipation apparaît simplement reliée à la non-régularité du champ de vitesse. Il faut supposer que $\nu = 0$ et donc travailler avec l'équation d'Euler. Le problème est alors que l'équation d'Euler est un système hamiltonien, censé conserver l'énergie. Mais examinons comment on montre la conservation de l'énergie pour une solution de l'équation d'Euler (plaçons-nous dans le cadre de solutions spatialement périodiques pour simplifier).

On part de l'équation $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p$; on la multiplie scalairement par \mathbf{u} et on intègre sur le tore, d'où

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} dx + \int u_i \partial_i u_k u_k dx = - \int \nabla p \cdot \mathbf{u} dx,$$

où l'on utilise la convention usuelle sur la sommation des indices.

¹ Sous sa forme la plus aboutie, ce paradoxe énonce que pour un écoulement de fluide parfait stationnaire, irrotationnel et constant à l'infini, autour d'un obstacle borné de l'espace, la résultante des forces de pression exercées sur l'obstacle est nulle.

² Lars Onsager a reçu le prix Nobel de chimie en 1968 pour la découverte des relations de réciprocité en thermodynamique linéaire.

On note que $u_i \partial_i u_k u_k = u_i \partial_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right)$ et on voit maintenant, en effectuant une intégration par parties, que les deux dernières intégrales sont nulles car $\text{div } \mathbf{u} = 0$. Il ne reste plus qu'à remarquer que la première intégrale est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique.

Pour justifier ce calcul, il faut au minimum que toutes les expressions écrites aient un sens, ce qui suppose une certaine régularité du champ \mathbf{u} . Onsager imagine alors que la turbulence est modélisée par des solutions (en un sens généralisé) de l'équation d'Euler, suffisamment peu régulières pour que l'énergie ne soit pas conservée. Les solutions imaginées par Onsager sont exactement les solutions faibles que nous avons précédemment définies.

De telles solutions existent-elles ? Oui, Shnirelman a construit récemment un exemple de solution faible qui dissipe l'énergie cinétique.

On a donc des candidats potentiels pour représenter le flot turbulent : ce sont des solutions faibles des équations d'Euler qui dissipent l'énergie. Malheureusement, on n'a pas de résultat général d'existence pour de telles solutions (on ne sait pas résoudre le problème de Cauchy avec une donnée initiale peu régulière) et encore moins de résultat d'unicité.

On peut tout de même faire un petit pas de plus dans cette direction.

On peut tout de même faire un petit pas de plus dans cette direction.

Conjecture d'Onsager et bilan local d'énergie pour des solutions faibles

En s'appuyant sur la loi du 4/5, Onsager avait conjecturé (en 1949) que les solutions faibles d'Euler qui vérifient une condition de Hölder d'ordre strictement plus grand que 1/3 doivent conserver l'énergie.

Cette conjecture est restée dans l'oubli jusqu'en 1992 quand Eyink a rappelé l'intérêt de ce problème et fourni une preuve d'un énoncé plus faible. En 1994, les trois mathématiciens Constantin, E (c'est son nom !) et Titi ont donné une preuve esthétique et simple d'un énoncé plus fort.

Mais on peut faire mieux et expliciter précisément ce qu'est la dissipation locale d'énergie par défaut de régularité.

Théorème (Duchon et Robert 2000). *Soit \mathbf{u} une solution faible de l'équation d'Euler sur le tore Π^3 , telle que $|\mathbf{u}|^3$ soit intégrable sur $]0, T[\times \Pi^3$. Soit φ une fonction indéfiniment dérivable à support compact sur \mathbb{R}^3 , positive, d'intégrale égale à 1 et symétrique. Pour $\varepsilon > 0$, notons*

$$\varphi^\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right),$$

et
$$D_\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{4} \int \nabla \varphi^\varepsilon(\xi) \cdot \delta \mathbf{u} (\delta \mathbf{u})^2 d\xi$$

Alors, lorsque ε tend vers 0, $D_\varepsilon(\mathbf{u})$ (qui est une fonction de t et x) converge, au sens des distributions sur $]0, T[\times \Pi^3$, vers une distribution $D(\mathbf{u})$, indépendante de φ , et on a le bilan local d'énergie :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + p \right) \mathbf{u} \right) + D(\mathbf{u}) = 0.$$

Commentaires

1. La démonstration découle de quelques manipulations simples à partir d'une version régularisée de l'équation d'Euler.
2. A partir de ce résultat, en intégrant l'équation du bilan local sur tout le domaine, on déduit immédiatement une preuve de la conjecture d'Onsager sous l'hypothèse de régularité sur le champ de vitesse :

$$\int |\mathbf{u}(t, x + \xi) - \mathbf{u}(t, x)|^3 dx \leq c(t) |\xi| \sigma(|\xi|),$$

où $\sigma(r)$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0 et $\int_0^T c(t) dt < \infty$.

3. L'équation du bilan local d'énergie amène à imposer une condition naturelle aux éventuelles solutions faibles censées représenter le flot turbulent : l'énergie ne peut qu'être dissipée et non pas créée au sein du fluide ; on supposera donc que $D(\mathbf{u})$ est une distribution positive (donc une mesure).

Cette condition est bien sûr à rapprocher des conditions d'entropie qui interviennent dans l'étude des équations hyperboliques non linéaires. Nous y reviendrons au paragraphe suivant.

4. Il est aisé à partir de cette formule d'établir une preuve rigoureuse de la loi du 4/5 sous des hypothèses raisonnablement faibles sur le champ de vitesse aléatoire.

UN MODÈLE INSTRUCTIF : L'ÉQUATION DE BURGERS A UNE DIMENSION

Le sens de la condition ($D(\mathbf{u}) \geq 0$), que nous avons imposée de manière abrupte, peut être éclairé par un détour du côté de l'équation de Burgers.

Commençons par rappeler quelques faits bien connus en ce qui concerne les équations hyperboliques non linéaires en général (penser par exemple aux équations régissant l'évolution d'un gaz compressible non visqueux). Pour ces équations, on est également obligé de

travailler avec des solutions faibles non régulières. La raison en est que, partant d'une donnée initiale régulière, la solution a tendance à former des chocs au bout d'un temps fini, c'est-à-dire que des discontinuités apparaissent. Ce phénomène est très général et peut être explicitement décrit sur l'équation la plus simple de ce type, à savoir l'équation de Burgers en dimension un d'espace :

$$(B) \quad \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0,$$

où u est maintenant une fonction scalaire définie sur la droite réelle.

Pour cette équation, on montre facilement qu'en partant d'une donnée initiale régulière (par exemple u_0 indéfiniment dérivable à support compact) il existe une unique solution régulière sur un intervalle fini $[0, T^*[$, en T^* des discontinuités apparaissent dans la solution. Si u_0 est seulement supposée intégrable, on peut montrer qu'il existe pour tout temps une solution faible. Le problème avec les solutions faibles est que l'on perd l'unicité pour le problème de Cauchy : on peut avoir plusieurs solutions correspondant à la même donnée initiale. Il faut alors rajouter une condition pour sélectionner la « bonne » solution : la condition d'entropie de Lax. Dans le cas de l'équation de Burgers, cette condition revient à dire que les discontinuités de la solution sont à sauts négatifs. La justification que cette condition sélectionne la solution physiquement admissible est liée au fait que l'information contenue dans la donnée initiale ne peut qu'être détruite et non pas créée au niveau des chocs ; on peut aussi montrer que cette solution est limite de la solution visqueuse obtenue en rajoutant une petite viscosité dans le système et en faisant tendre cette viscosité vers zéro. On peut alors montrer qu'il existe une seule solution faible entropique au problème de Cauchy (théorème de Kruzhkov).

Le calcul sur le bilan local d'énergie pour les solutions faibles de l'équation d'Euler s'étend aux solutions faibles de l'équation de Burgers ; il donne :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \partial_x \left(\frac{1}{3} u^3 \right) + D(u) = 0.$$

Si l'on suppose que u est discontinue aux points x_i avec des limites à droite et à gauche u_i^+ et u_i^- , on peut expliciter la distribution $D(u)$:

$$D(u) = -\frac{1}{12} \sum_i (u_i^+ - u_i^-)^3 \delta_{x_i},$$

la condition d'entropie de Lax s'écrit donc ici aussi $D(u)$ positif, et on voit bien que la dissipation d'énergie a lieu au niveau des chocs.

Solutions statistiques

On a vu que dans un écoulement turbulent, le nombre de degrés de liberté était gigantesque ; il s'ensuit que les observations physiques reproductibles ont un caractère statistique (que ce soit la formation des structures cohérentes ou les lois sur la dissipation d'énergie et la distribution des incréments de vitesse). D'un point de vue mathématique, cela pose le problème de la recherche de solutions statistiques. *A priori* le concept de solution statistique d'une équation d'évolution est simple ; on suppose que la donnée initiale est une fonction ou un champ de vecteur qui dépend d'un paramètre aléatoire et on lui associe la solution à l'instant t qui est donc une fonction aléatoire. Cette façon de voir est claire si l'on dispose d'un bon semi-groupe résolvant le problème de Cauchy ; comme ce n'est pas toujours le cas, on a généralement recours à des définitions plus larges de la notion de solution statistique, définitions qui vont poser des problèmes

épineux (comme l'unicité) mais dont l'intérêt est de pouvoir tout de même chercher des solutions statistiques d'équations pour lesquelles on ne sait pas résoudre le problème de Cauchy (Euler par exemple). Même dans les bons cas, où l'on dispose d'un semi-groupe, le fond du problème est de décrire le champ aléatoire à l'instant t en fonction de l'état initial.

Explicitons la démarche sur l'exemple modèle de l'équation de Burgers.

On va prendre comme condition initiale u_0 un processus en x : $u_0(x, a)$ (a paramètre aléatoire). Le flot de l'équation de Burgers (ou, si l'on préfère, le semi-groupe donnant la solution entropique unique) va donner à l'instant t un nouveau processus $u(t, x, a)$. Que peut-on en dire ?

La première avancée sur cette question est due à Sinai (en 1992) : il prend pour u_0 le mouvement brownien issu de 0. Il arrive alors à décrire à l'instant t le processus

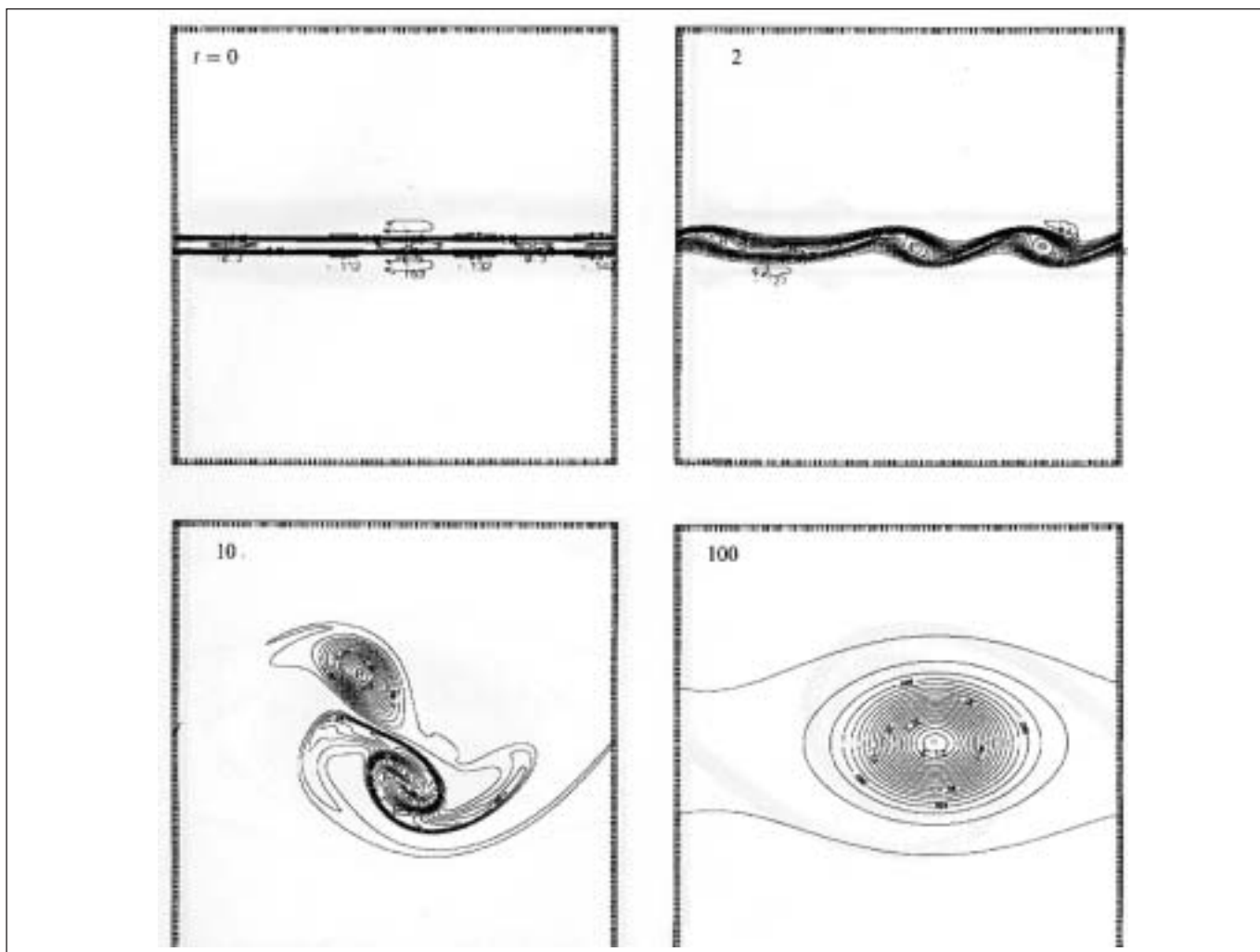


Figure 2 - Simulation numérique de l'évolution d'un fluide plan dont l'état initial est constitué d'une bande mince où la vorticité a une valeur constante (et nulle en dehors). La bande est instable et des tourbillons se forment. Les courbes représentent ici les lignes d'isovorticité. Finalement un état stationnaire, constitué d'un tourbillon unique, est atteint. La petite viscosité indispensable pour assurer la stabilité du calcul a pour effet de lisser les oscillations de la vorticité en dessous d'une certaine échelle spatiale ; c'est pourquoi on observe la convergence vers un état stationnaire. Ce phénomène est très général (simulations dues à J. Sommería, C. Staquet et R. Robert, effectuées sur le CRAY 2 du CCVR).

$u(t, x, a)$: c'est un processus de Lévy, processus bien connu qui peut avoir des sauts. Pour ce faire, Sinai utilise la construction classique de Hopf-Cole qui permet d'explicitement la solution faible entropique de l'équation de Burgers en fonction de la donnée initiale.

La deuxième avancée est celle de Carraro et Duchon (en 1994) : ces auteurs considèrent le cas où u_0 est un processus de Lévy homogène sur la droite (c'est-à-dire invariant par translation) et à sauts négatifs. Ils montrent qu'à l'instant t $u(t, x, a)$ est encore un processus de Lévy homogène à sauts négatifs ; de plus, ils obtiennent explicitement l'équation d'évolution régissant l'évolution de l'exposant de Lévy du processus (un processus de Lévy homogène est commodément décrit au moyen d'une certaine fonction que l'on appelle son exposant de Lévy).

La troisième avancée est due à Bertoin (1998) : Bertoin traite le cas d'un u_0 processus de Lévy issu de 0. Contrairement aux auteurs précédents, Bertoin utilise comme Sinai la transformation de Hopf-Cole alors que Carraro et Duchon s'en passent et sont amenés à introduire la notion de solution statistique intrinsèque (notion particulièrement intéressante, car elle donne une réponse naturelle au problème de la divergence infrarouge, omniprésente en turbulence).

La quatrième avancée est due à Chabanol et Duchon (2002) : ils prennent cette fois pour u_0 un processus de Markov homogène sur la droite, à sauts négatifs ; à tout instant u reste un processus de Markov homogène à sauts négatifs. Ils obtiennent en outre l'équation d'évolution portant sur le noyau de transition du processus.

Bien sûr, je ne prétends pas être exhaustif au sujet de l'équation de Burgers et j'écarte à regret bien d'autres contributions fort intéressantes. Cette histoire n'est évidemment pas finie et bien des questions demeurent, comme le rôle de l'homogénéité ou la question de l'unicité des solutions statistiques, plus la grande question de savoir comment obtenir ce type de résultat pour d'autres équations, celle d'Euler par exemple.

CONCLUSION

Quels sont les bons objets décrivant le flot turbulent ? Peut-être des solutions faibles des équations d'Euler, comme l'annonçait Onsager ; en tout cas, rien pour l'instant ne l'interdit. Alors, la description des propriétés statistiques du flot turbulent doit s'obtenir à partir d'une solution statistique convenablement définie.

Il se pourrait également que la bonne équation limite ne soit pas celle d'Euler mais un modèle plus complexe faisant intervenir les oscillations locales du champ de vitesse.

En tout état de cause, la clé du problème semble davantage contenue dans les équations d'Euler que dans Navier-Stokes. En effet, quand bien même on saurait résoudre convenablement le problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes, il faut faire tendre la viscosité vers zéro pour comprendre la turbulence à trois dimensions. Il y a peu de chance que l'on sache dire quelque chose sur cette limite, sans information sur le comportement d'une équation limite (celle d'Euler ?).

POUR EN SAVOIR PLUS

Sur l'œuvre de Jean Leray, voir l'article de **Jean-Yves Chemin** dans la *Gazette des mathématiciens*, supplément au numéro 84 (2000).

Sur les équations hyperboliques non linéaires et la condition d'entropie, voir le livre de **Denis Serre**, *Systèmes de lois de conservation I*. Diderot éditeur, 1996.

Sur la turbulence sous l'angle du physicien, voir le livre d'**Uriel Frisch**, *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995.

Voir aussi l'article de **Lars Onsager**, *Statistical hydrodynamics*. Nuovo Cimento, 6 (2), 279-287, 1949.

Sur les résultats évoqués ici et certaines de leurs conséquences, voir mon article à paraître, *Statistical hydrodynamics. Handbook of mathematical fluid mechanics*, vol. 2, Friedlander and Serre editors, 2003.

Sur l'équation de Burgers et les processus de Lévy, voir l'article de **Carraro et Duchon**, Ann. Inst. Henri Poincaré, *Analyse non linéaire*, vol. 15, 4, p. 431-458, 1998 et celui de **Bertoin**, *Comm. Math. Phys.*, 193, 397-406, 1998.